Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2011

DYNAMISKE MODELLER

Valgfag

Tirsdag den 9. august 2011

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Vi henleder din opmærksomhed på, at du skal besvare eksamensopgaven på det sprog, som du har tilmeldt dig ved eksamenstilmeldingen. Har du tilmeldt dig fagets engelske titel, skal du besvare det engelske opgavesæt på engelsk. Har du tilmeldt dig fagets danske titel eller den engelske titel med ”eksamen på dansk” i parentes, skal du besvare det danske opgavesæt på dansk.

Er du i tvivl om, hvad du har tilmeldt dig, fremgår det af printet med din tilmelding fra de studerendes selvbetjening.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

2. ÅRSPRØVE 2011 S-2 DM rx

SKRIFTLIG EKSAMEN I DYNAMISKE MODELLER

Tirsdag den 9. august 2011

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 3z^2 - 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 100e^t.$$

(1) Bestem rødderne i fjerdegradspolynomiet P.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

(4) Løs differentialligningen

$$\frac{d^6y}{dt^6} + 3\frac{d^4y}{dt^4} - 4\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

(5) Lad $a, b \in \mathbf{R}$. Vis, at differentialligningen

$$\frac{d^4x}{dt^4} + a\frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0$$

ikke er globalt asymptotisk stabil for nogen $a, b \in \mathbf{R}$.

(6) Lad $a, b \in \mathbf{R}$. Vis, at differentialligningen

$$\frac{d^5x}{dt^5} + a\frac{d^3x}{dt^3} + b\frac{dx}{dt} = 0$$

ikke er globalt asymptotisk stabil for nogen $a, b \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter differentialligningssystemerne

$$(\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 7y \end{cases}$$

og

$$(\$\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 2y + 45 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 7y + 90 \end{cases}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$).

(2) Bestem den specielle løsning $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ til (\$), således at betingelsen $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (2, 10)$ er opfyldt.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$\$).

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{f}(x, y) = \Big(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}\Big).$$

(1) Vis, at vektorfunktionen $\mathbf{f}$ har præcis et fikspunkt, og bestem dette fikspunkt.

(2) Vis, at

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{f}(x, y)\| \leq \|(x, y)\|.$$

(3) Bestem mængden

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{f}(x, y)\| = \|(x, y)\|\}.$$

(4) Vis, at mængden

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \land x \geq 0\}$$

er kompakt og konveks.

(5) Vis, at mængden

$$\mathbf{f}(K) = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists (x,y) \in K : (u,v) = \mathbf{f}(x,y)\}$$

er kompakt, og vis, at $\mathbf{f}(K) \subseteq K$.

(6) Bestem Jacobimatricen (funktionalmatricen) $D\mathbf{f}(x,y)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(7) Bestem determinanten $\det D\mathbf{f}(x,y)$ for Jacobimatricen $D\mathbf{f}(x,y)$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Opgave 4. Vi betragter funktionen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ givet ved

$$\forall (t,x,y) \in \mathbf{R}^3 : F(t,x,y) = x + \frac{1}{2}e^t y^2.$$

Desuden betragter vi funktionalen

$$I(x) = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}e^t \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right) dt.$$

(1) Vis, at for ethvert fastholdt $t \in \mathbf{R}$ er F en konveks funktion i (x,y) på hele $\mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer funktionalen $I(x)$, idet randværdibetingelserne $x^*(0) = -1$ og $x^*(1) = 5 - 2e^{-1}$ er opfyldt.